

Pensiero assiomatico

I teoremi di Gödel, la riflessione di Hilbert e la
metodologia di von Neumann

MARIO CASTELLANA
Università du Salente
mcastellana49@gmail.com

FORMICA (Giambattista), *Pensiero assiomatico : I teoremi di Gödel, la riflessione di Hilbert e la metodologia di von Neumann*. – Roma : Urbaniana University Press, 2022. – 161 p. – 1 vol. relié de 17 × 24 cm. – 19,00 €. – isbn 978-88-401-9059-4.

Ce dernier ouvrage de Giambattista Formica, déjà auteur de *Da Hilbert a von Neumann : La svolta pragmatica nell' assiomatica* de 2013, s'insère dans la littérature critique, variée et riche, sur les théorèmes d'incomplétude de Kurt Gödel, qui furent les résultats les plus incisifs de l'histoire de la logique du XX^e siècle, produisant des considérations philosophiques très hétérogènes et contradictoires même dans les dernières années. On pourrait dire avec Gaston Bachelard que ces théorèmes n'ont pas encore de philosophie à la mesure de leurs enjeux ; et ce travail de Formica aide à entrer dans leurs tournures historico-conceptuelles et les interroge comme un moment défini comme « crucial » dans l'histoire de la logique et des débats sur les fondements des mathématiques pour avoir donné « une réponse sans équivoque » (p. 7) et négative à la question d'une justification rigoureuse des mathématiques classiques ouvrant ainsi une nouvelle étape sur cette problématique et de nouveaux domaines de recherche. Et pour éviter ce que Formica appelle de véritables « pièges » (p. 8)

d'ordre philosophique, il interroge les apports de tels théorèmes à la problématique de la « nature de la méthode axiomatique moderne » avec son modèle spécifique de connaissance ; ils sont définis comme « un point d'observation privilégié » (p. 8) pour analyser le passé et avoir une idée plus précise des années suivantes d'une pratique scientifique.

L'effort épistémologique de ce volume est donc orienté à « comprendre la nature d'une certaine manière de faire de la science » (p. 9), et les différents chapitres, grâce à la lecture directe des textes des figures protagonistes, illustrent les contributions apportées par Hilbert et Gödel à l'évolution de la pensée axiomatique et à l'interprétation pragmatique que lui donne von Neumann ; pour Formica, ce scientifique « a participé activement au projet hilbertien » (p. 9), a apporté une contribution spécifique aux théorèmes d'incomplétude eux-mêmes et a permis une révision de l'approche hilbertienne du débat sur les fondements.

Le premier chapitre traite des débats du début du XX^e siècle visant à « une nouvelle idée de rigueur » (p. 12), ainsi que des différentes raisons historico-conceptuelles qui ont conduit à considérer « Hilbert, père de l'axiomatique moderne » (p. 19), pour arriver à l'analyse de l'irruption des théorèmes gödéliens à Vienne et des premières implications philosophiques ; on prend conscience du fait que la méthode axiomatique est changée et surtout du fait que cette méthode est « pratiquée dans un cadre épistémologique différent » (p. 75) grâce au sens pragmatique que lui assigne von Neumann. Dans ce cadre épistémique, la méthode axiomatique selon Formica conserve son « dynamisme constitutif », visant à rechercher « analytiquement les fondements conceptuels de notre connaissance » (p. 47), et surtout elle est en accord avec le programme propre de Hilbert.

Le deuxième chapitre entre dans la clarification de la valeur jugée « féconde » de la méthode axiomatique hilbertienne considérée comme « une méthode analytique par prise en charge dynamique des processus synthétiques et des réflexions métathéoriques » (p. 49) grâce à l'analyse de l'apport important de l'écrit de 1917 *Axiomatisches Denken*, où l'on estime qu'il existe « une image assez complexe » (p. 65) de cette méthode et basée sur des aspects procéduraux ; à cet égard, Formica donne une lecture précise de la notion stratégique de *Fachwerk von Begriffen*, une véritable « théorie cognitive des champs » pour comprendre la relation logique entre les concepts, où la « méthodologie du programme » (pp. 66-67) hilbertienne se manifeste d'une manière particulière.

Le troisième chapitre illustre les objections gödéliennes à la méthode axiomatique hilbertienne et ce que les théorèmes d'incomplétude « n'ont pas touché du tout » (p. 759), d'où le fait qu'elle a été une fois de plus « pratiquée » avec une approche différente par von Neumann ; c'est un chapitre très intéressant qui nous amène à voir les années 1930 « avec et au-delà de Gödel » (p. 77), un choix historico-conceptuel qui s'avère fécond pour dresser un tableau plus adapté à la complexité de ce moment unique et crucial de la pensée logico-mathématique.

Cet ouvrage de Formica se distingue avant tout par l'analyse de ce qu'il appelle très justement « l'événement de la phase initiale d'incomplétude » (pp. 77-78) et du rôle de von Neumann au congrès de Königsberg de septembre 1930 ; son « honnêteté intellectuelle » est soulignée pour avoir reconnu à Gödel « la paternité de la découverte » (p. 78) du deuxième théorème malgré le fait qu'il l'avait pensé de différentes manières. Ce chapitre constitue en outre une analyse très instructive des différentes « hypothèses erronées sur la découverte de von Neumann » et de sa « diatribe » (pp. 85-89) grâce aux échanges d'idées ultérieurs avec Gödel prenant en considération de manière critique les lettres du logicien français Jacques Herbrand et les comptes rendus de Wang à travers les œuvres récentes de von Plato. Les efforts de Formica conduisent à tracer un chemin où von Neumann *contra* Gödel a esquissé « une interprétation radicale du deuxième théorème qui s'est avérée correcte par la suite » (p. 107), un fait accepté par Gödel lui-même en 1933 dans le rapport au Congrès des mathématiciens de Cambridge intitulé *The Present Situation in the Foundations of Mathematics* ; ainsi, von Neumann a su très bien mettre en évidence « les conséquences inévitables de la leçon d'incomplétude grâce à une méthodologie opportuniste de la science encore fondée sur la méthode axiomatique » (p. 111) en mettant de côté certains aspects du programme hilbertien.

Le dernier chapitre vise à analyser, à la lumière des théorèmes de Gödel, « les aspects pragmatiques » (p. 113) considérés comme implicites dans l'axiomatique hilbertienne et dans la méthodologie de la science de von Neumann suite à la découverte de l'incomplétude ; sont étudiés les premiers écrits arithmétiques de Hilbert jusqu'à *Neubegründung der Mathematik* de 1922 et *Die logischen Grundlagen der Mathematik* de 1923 pour les références à des « critères de légitimation pragmatiques » comme par exemple le succès de chaque théorie, des « critères de justification alternatifs » en l'absence d'actes démonstratifs de cohérence (p. 125). C'est donc von Neumann qui, dans *The Mathematician* de 1947 et dans *Method in the Physical Science* de 1955, tra-

vaillait sur une nette « inversion » étroitement liée à la pratique réelle de la science et fondée sur une vision « opportuniste » (p. 133) en développant l'idée hilbertienne du succès pour étendre les connaissances. Les théorèmes gödéliens n'ont fait que « démolir de l'intérieur la structure fondationnelle » du programme hilbertien (p. 144) ; mais la méthode axiomatique est considérée comme stratégique pour « tenter de pénétrer les conditions nécessaires de nos théories scientifiques » (p. 144) et de mieux les fonder. Et le choix de von Neumann est finalement considéré comme une réponse à l'âme pragmatiste de la méthode axiomatique moderne grâce au fait qu'elle est « graduelle, flexible et ouverte... Et son utilisation donne aux sciences... et au scientifique la possibilité de penser d'une manière plus consciente » (p. 144).